

**Barem clasa a XII-a**  
**(OLM 2015-etapa locală)**

**Of. 10 p**

**Subiectul I. (40 puncte)**

- a)  $A(x) \cdot A(y) = A(x+y) \Rightarrow A(x) \cdot A(y) \in G \Rightarrow G$  este parte stabilă a lui  $M_3(R)$  în raport cu înmulțirea matricelor; (5 p)  
 Înmulțirea în  $M_3(R)$  este asociativă, deci și în  $G$  este asociativă; (5 p)  
 $I_3 = A(0) \in G$  este elementul neutru pentru înmulțirea în  $G$ ; (5 p)  
 $A(x) \cdot A(-x) = A(-x) \cdot A(x) = A(0) = I_3$ , deci orice element din  $G$  este simetrizabil; (5 p)  
 $A(x) \cdot A(y) = A(x+y) = A(y+x) = A(y) \cdot A(x)$ , deci înmulțirea în  $G$  este comutativă; (5 p)
- b) Fie funcția  $f: G \rightarrow R, f(A(x)) = x$   
 $f$  bijectivă (5 p)  
 $f(A(x)A(y)) = f(A(x+y)) = x+y = f(A(x)) + f(A(y))$ , deci  $f$  este morfism de grupuri (5 p)
- c)  $f(A^n) = f\left(\underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n\right) = f(A) + f(A) + \dots + f(A) = n \cdot f(A) = nx \Rightarrow A^n = f^{-1}(nx) = A(nx)$   
 Atunci  $A^{2015} = A(2015x)$ . (5 p)

**Subiectul II. (10 puncte)**

Fie  $e$  elementul neutru al grupului  $G$ . Arătăm că  $x \neq x^{-1}, \forall x \in G \setminus \{e\}$ .  
 Presupunem că  $\exists x \in G \setminus \{e\}, x = x^{-1} \Rightarrow x^2 = e \Rightarrow f(x) = e$ , dar  $f(e) = e \Rightarrow f(x) = f(e) \Rightarrow x = e$ ; Contrad.  
 Deci  $x \neq x^{-1}, \forall x \in G \setminus \{e\}$ . Dacă grupăm elementele mulțimii  $G \setminus \{e\}$  în perechi de forma  $(x, x^{-1})$  observăm că  $G \setminus \{e\}$  are un număr par de elemente, deci  $G$  va avea număr impar de elemente. (10 p)

**Subiectul III. (20 puncte)**

- a) Teorema de medie  $\Rightarrow \int_1^n x \cdot \sin \frac{1}{x} dx = F(n) - F(1) = (n-1)f(x_n) = (n-1)x_n \cdot \sin \frac{1}{x_n}, x_n \in (1, n)$  (5 p)
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_1^n x \cdot \sin \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (n-1)x_n \cdot \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \underbrace{x_n \cdot \sin \frac{1}{x_n}}_{x_n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n \cdot \sin \frac{1}{x_n} \rightarrow 1} = 1$$
- (5 p)
- b)  $e^{nx} \geq 1 + nx \Rightarrow nx \geq \ln(1 + nx) \Rightarrow \sum_{k=1}^n \ln(1 + kx) \leq \sum_{k=1}^n kx \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^n \ln(1 + kx) \leq \frac{n(n+1)}{2} x \Rightarrow \int_0^1 \sum_{k=1}^n \ln(1 + kx) dx \leq \frac{n(n+1)}{4}$ . (10 p)

**Subiectul IV. (20 puncte)**

$$F(x) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{f(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow e^{F(x)} \cdot f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow (e^{F(x)})' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Deci  $e^{F(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1} + C, F(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$  (10 p)